Einführung

Über Mathematik und die Lehrveranstaltung

Mathematik ist eine Wissenschaft, die:

- physikalische Größen (z. B. Strecken, Stäbe, Kanten, Kurven, Flächen, Körper, Abläufe, Mengen von Geldscheinen) durch die wichtigsten Größenarten (z.B. Längen, Flächeninhalte, Volumina, Zeitspanne, Geldwerte) mit entsprechenden Einheiten (m, m^2, m^3, min, km/h usw.) definiert und behandelt;
- die Abläufe und Vorgänge durch Axiomen beschreibt, die Sätze aus Axiomen deduziert und einer intensiven Analyse unterzieht;
- logische Strukturen zwischen Größen entdeckt bzw. die Größen verknüpft und daraus die Mengen bildet;
- Zahlen als Repräsentanten von Größen und Operatoren einführt;
- ingenieurtechnische Probleme durch mathematische Größen beschreibt und löst;
- Lösungen sammelt und generalisiert bzw. verallgemeinert;
- Werkzeuge zur Entwicklung von Algorithmen und Programmen zur Verfügung stellt.

Aber: Mathematik ist keine Naturwissenschaft, obwohl große Teile der Mathematik für Naturwissenschaften entwickelt wurden.

- **Beispiel:** Hubraum (nach *J. Dillinger, B. Grimm, G. Mark, T. Müller und B. Schiemann*: Mathematik für die Fachhochschulreife, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2005, Seite 33).

Ein Vierzylinder-Viertakt-Motor hat einen Hubraum von 1,2 Liter. Bestimmen Sie den Hub h des Motors, wenn die Zylinderbohrung 75 mm beträgt.

Lösung:

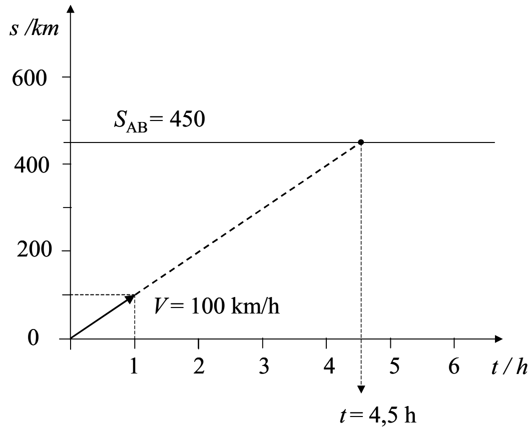
Das gegebene Volumen V = 1200 cm^3 und der Innendurchmesser $d = 7{,}7$ cm bilden die folgende Gleichung, woraus der gesuchte Hub bestimmt wird:

$$V = 4 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{V}{\pi \cdot d^2} = \frac{1200\,\text{cm}^3}{\pi \cdot 56{,}26\,\text{cm}^2} = 6{,}79\,\text{cm}$$

- **Beispiele:**

a) Zwei Orten A und B sind voneinander um 450 km entfernt. Ein Wagen fährt von A zu B mit der konstanten Geschwindigkeit von

V= 100 km/h



Wie lange dauert seine Fahrt?

Lösung:

$$V \cdot t = S_{AB}$$

$$t = \frac{S_{AB}}{V} = S_{AB} \cdot V^{-1}$$

$$t = \frac{450\,\text{km}}{100\,\text{km/h}} = 4{,}5\ \text{h}$$

Die grafische Lösung ist im Diagramm oben gezeigt.

b) Zwei Orten A und B sind voneinander um 450 km entfernt. Ein Wagen startet von A mit der Geschwindigkeit von

V= 100 km/h

Gleichzeitig startet ihm entgegen der zweite Wagen mit der Geschwindigkeit

V= 65 km/h

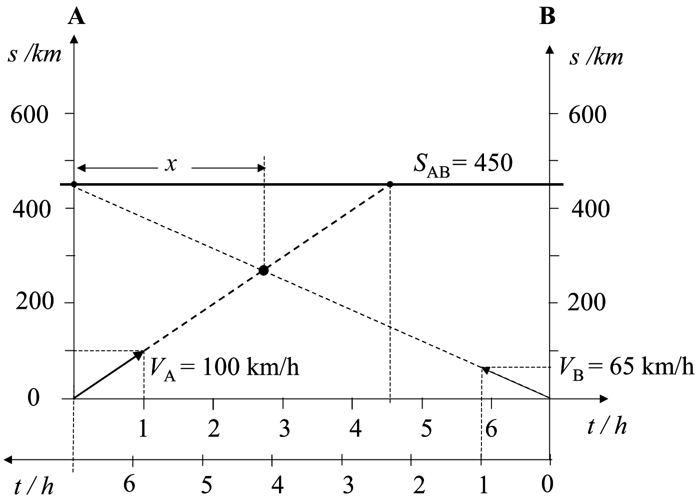
und fährt zum Ort A. Wie weit ist der Treffpunkt von A entfernt?

Lösung:

Die grafische Lösung ist im Diagramm neben gezeigt. Daraus kann man für den Schnittpunkt ablesen:

$x \approx 273$ km.

(analytische Lösung: $x = 272{,}72$ km)



c) Zwei Orten A und B sind voneinander um 616 km entfernt. Sechs Wagen überwinden die gesamte Strecke von A zu B in sechs Zeitabschnitten t_k von $k = 1$ bis $k = 6$. Die Geschwindigkeiten für alle Zeitabschnitte t_1 bis t_6 sind in Tabelle unten in km/h gegeben.

k \ V	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
1	100	120	90	100	160	80
2	110	80	100	120	60	70
3	90	100	110	90	40	81
4	130	100	90	80	80	84
5	110	130	100	100	90	66
6	120	90	100	90	70	77

Bestimmen Sie, wie lange die Fahrt jedes Wagens bis zu dem von A um 500 km entfernten Ziel dauert.

Lösung:

Die Lösung erfolgt mit einem PC nach der bereits behandelten Formel

$$t = \frac{S_{\mathrm{AB}}}{V} = S_{\mathrm{AB}} \cdot V^{-1},$$

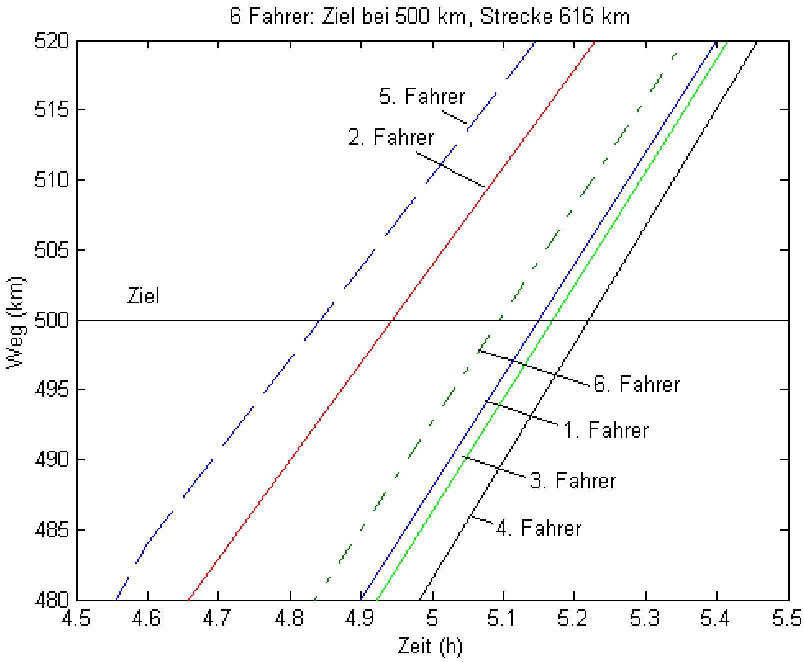
jedoch wird dafür ein Gleichungssystem wie folgt gebildet:

$$\begin{cases} 100t_1 + 120t_2 + 90t_3 + 100t_4 + 160t_5 + 80t_6 = 616 \\ 110t_1 + 80t_2 + 100t_3 + 120t_4 + 60t_5 + 70t_6 = 616 \\ 90t_1 + 100t_2 + 110t_3 + 90t_4 + 40t_5 + 81t_6 = 616 \\ 130t_1 + 100t_2 + 90t_3 + 80t_4 + 80t_5 + 84t_6 = 616 \\ 110t_1 + 130t_2 + 100t_3 + 100t_4 + 90t_5 + 66t_6 = 616 \\ 120t_1 + 90t_2 + 100t_3 + 90t_4 + 70t_5 + 77t_6 = 616 \end{cases}$$

Das Gleichungssystem kann mit beliebigem Simulationsprogramm gelöst werden, dass mit Matrizen operieren kann. Hier wurde das Gln.-System mit MATLAB gelöst.

1. V = [100, 120, 90, 100, 160, 80; 110, 80, 100, 120, 60, 70; 90, 100, 110, 90, 40, 81; 130, 100, 90, 80, 80, 84; 110, 130, 100, 100, 90, 66; 120, 90, 100, 90, 70, 77]; { Matrix V eingeben}
2. S = [616; 616; 616; 616; 616 ; 616]; {Vektor S_{AB} eingeben}
3. t = inv(V)*S {die Zeit nach der obigen Formel $t = V^{-1} \cdot S$ berechnen}

Die Antwort ist unten grafisch dargestellt und in Tabelle zusammengefasst.



k	1	2	3	4	5	6
Zeit t_k (h)	1	0,5	2	1	0,1	2

- **Beispiel:** Weinfest (nach *A. Schmidt, I. Weidig*: Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1997, Seite 51).

Nach dem Besuch eines Weinfestes hat Herr Rompel um Mitternacht einen Blutalkoholspiegel von 1,5 %. Jede Stunde wird der Alkoholgehalt im Blut um 0,15 % abgebaut.

a) Droht ihm morgens um 7 Uhr Führerscheinentzug, weil mehr als 0,3 % Alkohol im Blut um 7 Uhr nachgewiesen werden kann?

b) Wie ändert sich sie Lösung, falls der Alkoholgehalt im Blut $y(t)$ exponentiell nach der Funktion $y(t) = 1{,}5\% \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ mit $T = 3{,}5$ h abgebaut wird?

Lösung:

a) Der Abbau des Alkoholgehalts erfolgt nach der linearen Funktion

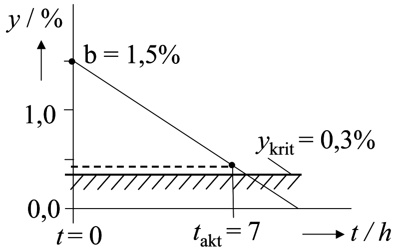
$$y = k \cdot t + b \text{ mit } k = -0{,}15 \text{ und } b = 1{,}5.$$

Zum gefragten Zeitpunkt bei $t_{\text{akt}} = 7$ ergibt sich:

$$y = -0{,}15 \cdot 7 + 1{,}5 = 0{,}45$$

Aus dem Diagramm rechts erkennt man, dass dies oberhalb des Grenzwertes

$y_{\text{krit}} = 0{,}3$ liegt.



b) Bei dem exponentiellen Alkoholabbau bleibt weniger Alkohol im Blut:

$$y(t) = 1{,}5 \cdot e^{-\frac{7}{3{,}5}} = 1{,}5 \cdot e^{-2} = 0{,}2$$

- **Beispiel:** Bestimmen Sie x aus folgender Gleichung (*S. Zacher*, 1992)

$$(372372 + 859859 + 366366 + 642642) \cdot x =$$
$$= 372372372372372372372372 + 859859859859859859859859 +$$
$$+ 366366366366366366366366 + 642642642642642642642642$$

Anmerkung: Jeder, der gern Schach spielt, besitzt die Vorstellungskraft und erfreut sich an mathematischer Denkweise. Jedoch ist Mathematik keine Spielerei, obwohl Knobeleien oder Puzzelspiele oft als Motivation dienen und dabei Vergnügen bereiten, wie die Lösung dieses Beispiels zeigen soll.

Lösung:

Nach der konventionellen Lösung mit dem PC ergibt sich:

$$x = \frac{2{,}2412 \cdot 10^{24}}{2241239} = 9{,}9998 \cdot 10^{17}$$

Geht man jedoch aus den Eigenschaften von Proportionen aus:

$$\begin{aligned} a \cdot k = b \quad &\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = k \\ c \cdot k = d \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{c} = k \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{b+d}{a+c} = \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = k$$

und merkt man, dass: $\dfrac{372372}{372} = 1001$ und $\dfrac{372372372372}{372372} = 1000001$,

so folgt die genaue Lösung:

$$\frac{b+d+f+h}{a+c+e+g} = \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{h}{g} = k = x = 1000001000001000001$$