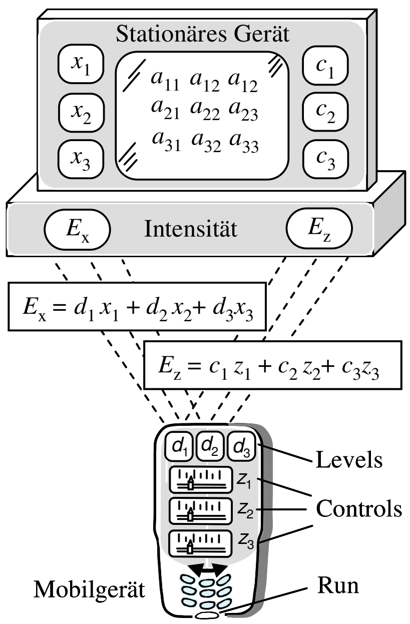
2.2 Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Ein Gleichungssystem mit $n = 3$ Unbekannten x_1, x_2 und x_3 wird bekanntlich wie folgt dargestellt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

Die 3×3 Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, \ldots\ a_{33}$ sowie die Absolutglieder c_1, c_2, c_3 sind gegeben. Für die Lösung nach dem Prinzip der Fernsteuerung wird ein passendes Gleichungssystem (Mobilsystem) mit neuen Variablen z_1, z_2, z_3 eingeführt, wobei die Absolutglieder d_1, d_2, d_3 nicht festgelegt sind:

$$\begin{cases} b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3 = d_1 \\ b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + b_{23}z_3 = d_2 \\ b_{31}z_1 + b_{32}z_2 + b_{33}z_3 = d_3 \end{cases}$$



Das letzte Gleichungssystem besteht aus insgesamt 15 Größen und ist im Bild 2.1 wie ein Mobilgerät mit drei Eingangsvariablen, *Controls* z_1, z_2, z_3, und drei Ausgangsvariablen, *Levels* d_1, d_2, d_3, dargestellt. Die Koeffizienten $b_{11}, b_{12}, b_{13}, \ldots\ b_{33}$ werden aus den Koeffizienten des Originalsystems ermittelt und gelten als gegeben. Von den sechs restlichen Größen werden drei frei gewählt: entweder *Controls* z_1, z_2, z_3 oder *Levels* d_1, d_2, d_3, oder eine Kombination von beiden, z. B. z_1, d_1, d_2.

Bild 2.1 Darstellung eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten als stationäres Gerät und das entsprechende Mobilgerät

Diese drei Größen werden gezielt so gewählt, dass eine der Gleichungen des Mobilsystems wegfallen wird. Außer *n* Unbekannten *x* bleiben also noch drei Unbekannten übrig, zu deren Bestimmung stehen uns nur zwei Gleichungen des Mobilgerätes zur Verfügung.

Es gibt jedoch eine dritte Gleichung, die diese drei Unbekannten genau bestimmen lässt. Das ist die im vorherigen Kapitel beschriebene Bilanz von Intensitäten E_x und E_z:

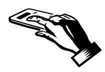
$$\begin{aligned} E_x &= d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 \\ E_z &= c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad E_x = E_z$$

Sie nicht nur verbindet die Unbekannten des Mobilsystems mit Unbekannten *x*, sondern lässt die gesamte Lösung zu vereinfachen.

Die Lösung bzw. die Fernsteuerung erfolgt für jede Unbekannte in jeweils fünf Schritten. Zuerst zeigen wir, wie die Unbekannte x_1 bestimmt wird.

1. Schritt: Das Mobilsystem wird für Unbekannte x_1 kalibriert.

Es werden *Levels* für Unbekannte x_2 und x_3 auf Null angesteuert



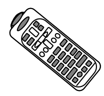
$$d_2 = d_3 = 0\,.$$

Der *Control* z_3 wird auf einen beliebigen Wert eingestellt, z. B.

$$z_3 = 1\,.$$

Das Mobilsystem sieht dabei wie folgt aus:

$$\begin{cases} b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + b_{13} z_3 = d_1 \\ b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + b_{23} z_3 = 0 \\ b_{31} z_1 + b_{32} z_2 + b_{33} z_3 = 0 \end{cases}$$



2. Schritt: Ein Teilsystem wird gebildet und gelöst.

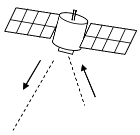
4. Schritt: Mit einem *Run*-Befehl wird die Kommunikation erstellt.

Auf dem Display des stationären Gerätes erscheint der Wert der Intensität

$$E_z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3$$

5. Schritt: Die Intensität E_x wird an die Intensität E_x angepasst, d. h.

$$E_z = E_x$$

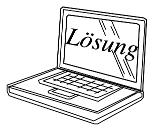


bzw.

$$E_z = d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = d_3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$

und die gesuchte Unbekannte x_1 erscheint auf dem Display:

$$x_1 = \frac{E_z}{d_1}$$



- **Beispiel**

Gegeben ist das Originalsystem:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 = -8 \end{cases}$$