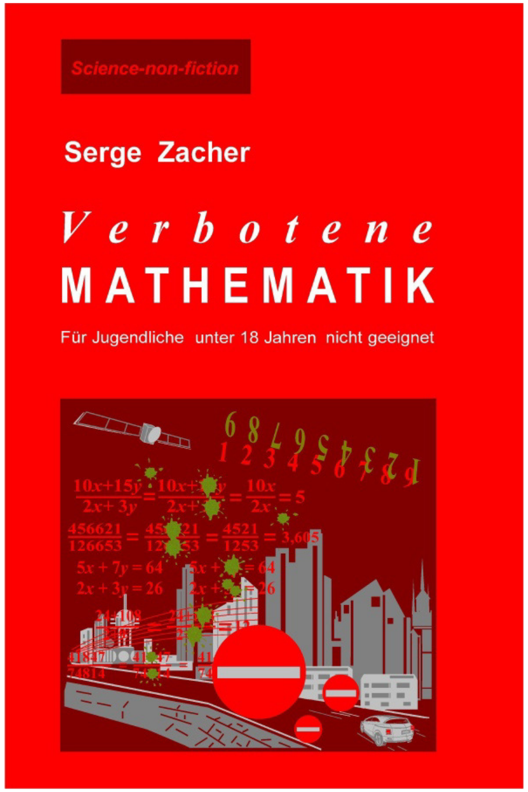
Prof. Dr. S. Zacher

Wie lösen wir algebraische Gleichungen mit zwei Unbekannten?

Präsentation zum Buch „Verbotene Mathematik“

2012, ISBN 978-3-937638-22-5



Wie lösen wir algebraische Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten?

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Na, klar, nach dem *Eliminationsverfahren*, wie sonst? Dieses Verfahren, auch *Gaußsches* Verfahren genannt, ist uns schon seit Schuljahren bekannt.
Oder nach *Cramersche* Regel, die aber auch etwas komplizierter ist. Das sind die einfachsten und schnellsten Verfahren!

Gabriel Cremer
(1704-1752)

Kann man heute doch die Lösung schneller finden?

Ja, dafür gibt es eine Liste von numerischen Verfahren, aber die Lösung erfolgt mit PC. Noch ein Verfahren findet man im Buch „Mobile Mathematik. Ein neues Konzept zur Lösung von linearen Gleichungssystemen."

Dieses Buch wurde im „Jahr der Mathematik" bzw. im Wissenschaftsjahr 2008 veröffentlicht. Im gleichen Jahr folgte noch ein Buch „Existentielle Mathematik", später das Buch „Verbotene Mathematik" (2012). In diesen Büchern versuchte ich, mal als außerirdischer Professor Gammalf Zett, mal als kluges Schneiderlein, ein neues Verfahren ASA für die Lösung von verschiedenen mathematischen Aufgaben, darunter auch von Gleichungssystemen, unterhaltsam für Kollegen und für breites Publikum zugänglich zu machen.

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

ASA ist die Abkürzung für *Antisystem-Approach*, das ich zum ersten Mal 1968 in Fachzeitschrift „Chemische Technik“ in Bezug auf ein Engineering-Problem veröffentlichte.

Danach folgte eine Reihe von Publikationen, Tagungsvorträgen, Diplomarbeiten, Einsätze bei Industrie-Projekten.

Noch später kam auch die mathematische Interpretation des ASA-Verfahrens für „Zahlen-Akrobatik“ in den besagten drei Büchern. Aber die Rückmeldung der Mathematik-Kollegen war eher karg, um über das breite Publikum nicht zu sprechen.

Warum eigentlich? Vielleicht wurden die o.g. Bücher gar nicht bemerkt? Oder findet man keine Zeit, die Märchen und Erzählungen von Zahlen und deren Abenteuern zu lauschen?

Mathematik ist in der Schule schon immer ein Problemfach für die meisten Schüler. Das hat mir kürzlich auch eine Mathematiklehrerin wieder bestätigt. Vielleicht dadurch sind die mathematischen Applikationen von ASA nicht sofort verständlich, obwohl selbst das Antisystem-Approach einfach und bei technischen Anwendungen verständlich ist.

Um das Verständnis zu erleichtern, ist die vorliegende Präsentation gedacht, die natürlich der Urheberrecht unterliegt.

Was ist ASA?

Das ASA-Konzept betrifft das Zusammenspiel von zwei Systemen, das schon längst als *Dualitätsprinzip* bekannt ist.

In der Philosophie dual sind dies z.B. Gute und Böse, Liebe und Hass.

In der Physik hat Isaak Newton dieses Prinzip in seinem 3. Gesetzt „Kraft gleich Gegenkraft“ festgelegt.

In der Elektrotechnik wirken die positive und negative Ladungen gegeneinander.

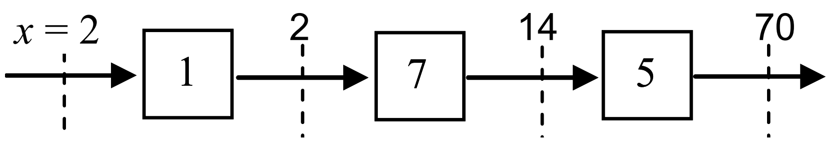
Beispiele dafür findet man überall, nur nicht in der Mathematik, obwohl man auch die arithmetischen Operationen wie Addition und Subtraktion auch dual vorstellen kann.

Was ist ASA im Sinne der Operationen mit Zahlen?

Stellen wir uns vor, dass eine arithmetische Operation

$$x_{\mathrm{end}} = 1 \cdot 7 \cdot 5 \cdot x$$

grafisch blockweise abgebildet wird, wie im Bild unten. Es ist natürlich klar, dass bei x = 2 am Kettenende wird x_{end} =70 sein. Die Kette wird *Originalsystem* genannt.

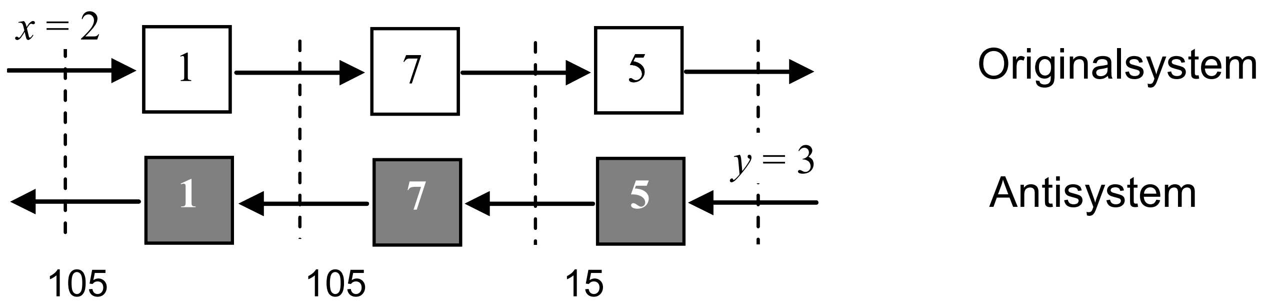


Originalsystem

Quelle: S.Zacher „*Verbotene Mathematik*“, ISBN 978-3-937638-22-5, 2012, Seite 75

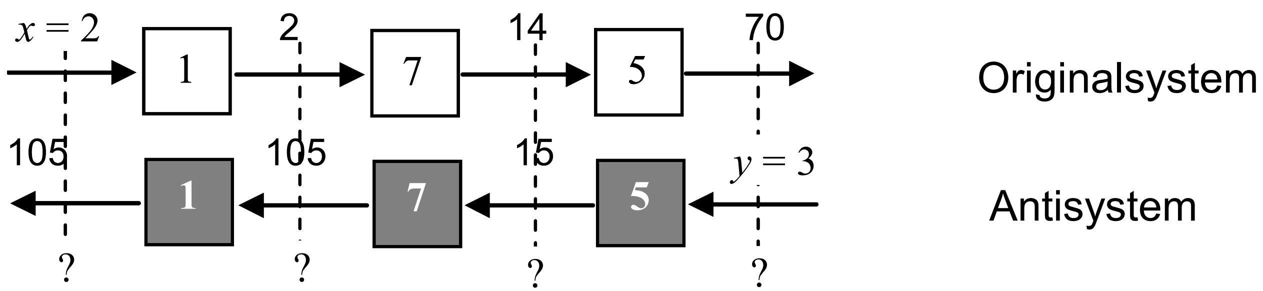
S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Nach dem Antisystem-Approach soll dazu ein Antisystem in Betrachtung eingeführt werden. Aus dem Bild unten ist ersichtlich, wie das Antisystem gebildet wird. Das ist nämlich das Originalsystem, nur mit Pfeilen in Gegenrichtung.



Man kann berechnen, dass bei y = 3 gilt $y_{\text{end}} = 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot y = 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 = 105$.

Und wie groß sind dabei die Querschnittprodukte, die im Bild unten mit Fragezeichen angedeutet sind?
Die sind alle gleich 210.



S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Die Querschnittprodukte sind in meinen Mathematik-Büchern je nach Aufgabenart unterschiedlich genannt: Produkte, Intensitäten, Energien. Bleiben wir im Folgenden bei der letzten Bezeichnung. Damit wird ASA wie folgt formuliert:
Wenn das Originalsystem und das Antisystem gleich sind, dann bei beliebigen Werten von x und y sind die Energien überall, d.h. in jedem Querschnitt, gleich.
Dies kann ohne Kenntnisse der höheren Mathematik nachgewiesen werden.

Das ASA-Verfahren kann für verschiedene Strukturen erweitert werden und überall wird die Bilanz von Energien zwischen Original- und Antisystem gleich.

Das ist unten an einem Beispiel aus dem Buch „Existentielle Mathematik“, Seite 78, verdeutlicht. Bei beliebigen Werten von q, z.B. q = 5, sind die Antisystem-Werte:

$$p_1 = 2 \cdot 5 = 10$$

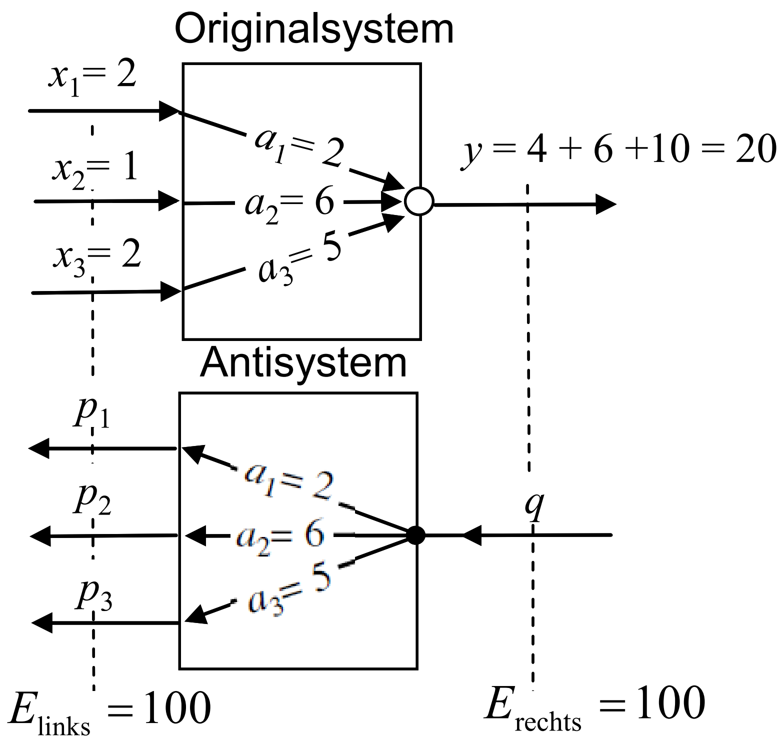
$$p_2 = 6 \cdot 5 = 30$$

$$p_3 = 5 \cdot 5 = 25$$

Es gilt die „Zahlen-Energie“-Bilanz:

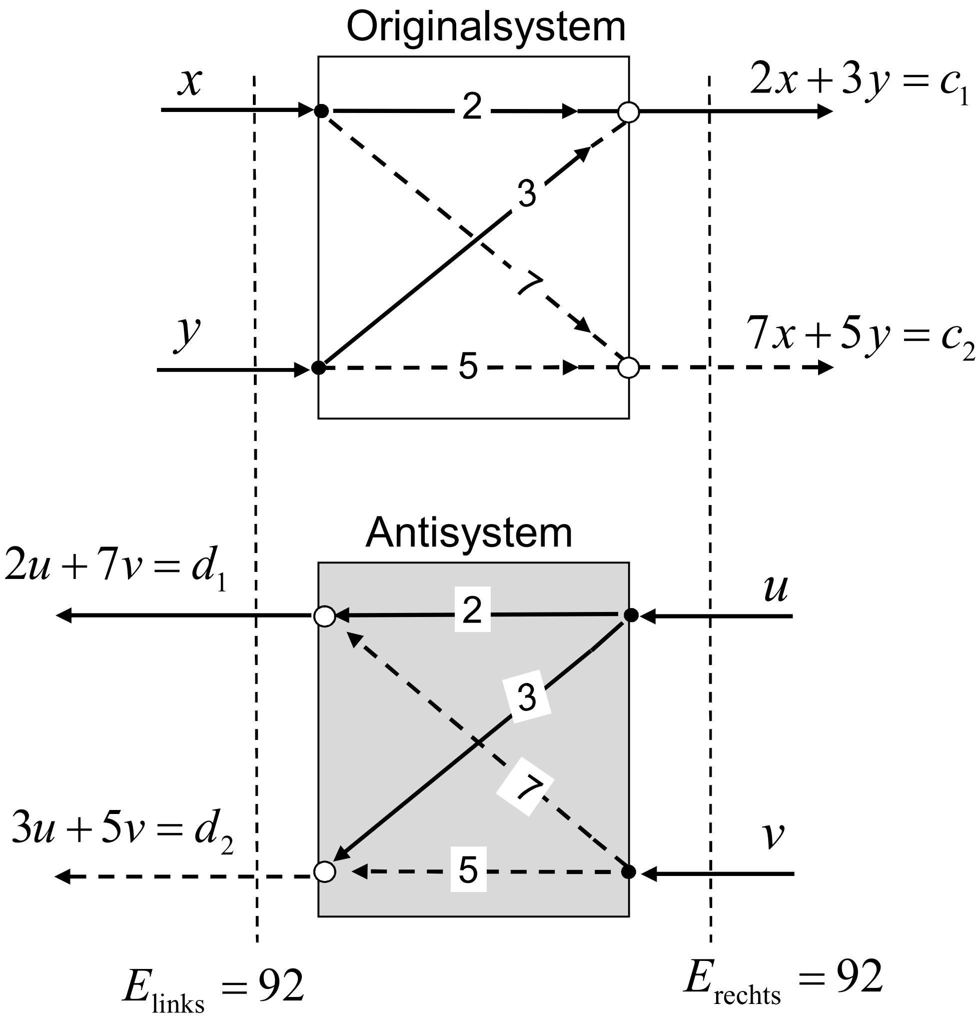
$$E_{\text{links}} = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 25 = 100$$

$$E_{\text{rechts}} = q \cdot y = 5 \cdot 20 = 100$$



S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Da in dieser Publikation die Anwendung des ASA-Verfahrens für Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten behandelt wird, ist unten ein passendes Beispiel nach dem Buch „Existentielle Mathematik“, Seite 196, gezeigt. Daraus ist ersichtlich:



Originalsystem:

$$\begin{cases} 2x+3y=c_1 \\ 7x+5y=c_2 \end{cases}$$

Antisystem:

$$\begin{cases} 2u+7v=d_1 \\ 3u+5v=d_2 \end{cases}$$

Bei beliebig gewählten Werten, z.B. x = 1; y = 2; u = 3; v = 4; ergibt sich (siehe das Bild):

c_1 = 8; c_2 = 17; d_1 = 34; d_2 = 29.

„Zahlen-Energie“-Bilanz:

$$E_{\text{links}} = x\cdot d_1 + y\cdot d_2 = 92$$

$$E_{\text{rechts}} = u\cdot c_1 + v\cdot c_2 = 92$$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Nun kehren wir zu der im Titel gestellten Frage zurück:

Wie lösen wir die linearen Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten:

Nehmen wir als Beispiel die folgende Gleichung

$$\begin{cases} 2x + 3y = 280 \\ 7x + 5y = 540 \end{cases}$$

Merken wir die Schreibweise: die Unbekannten x und y werden untereinander spaltenweise geschrieben, die Absolutglieder 280 und 540 auch.

Das ist immer so!

Laut dem Gaußschen-Algorithmus multiplizieren wir die erste Gleichung mit dem Faktor 7 und die zweite Gleichung mit dem Faktor 2:

1. Schritt:

$$\begin{cases} 7 \cdot 2x + 7 \cdot 3y = 7 \cdot 280 & \mid \times 7 \\ 2 \cdot 4x + 2 \cdot 5y = 2 \cdot 540 & \mid \times 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 14x + 21y = 1960 \\ 14x + 10y = 1080 \end{cases}$$

Jetzt sind die Koeffizienten bei der Unbekannte x in beiden Gleichungen gleich 14.

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Danach eliminieren wir die Unbekannte x, indem wir die linke und die rechte Seiten der Gleichungen voneinander subtrahieren, was unten detailliert gezeigt ist:

2. Schritt:

$$\begin{cases} 14x + 21y = 1960 \\ 14x + 10y = 1080 \end{cases}$$

$$(14x + 21y) - (14x + 10y) = (1960) - (1080)$$

$$14x + 21y - 14x - 10y = (1960 - 1080)$$

$$(14x - 14x) + (21y - 10y) = 1960 - 1080$$

$$11y = 880$$

Aus der letzten Gleichung wird im nächsten Schritt die Unbekannte y berechnet.

3. Schritt:

$$y = \frac{880}{11} = 80$$

Dann werden wir aus der ersten oder der zweiten gegeben Gleichung auch x bestimmen, z.B. aus der ersten Gleichung, mit dem Einsatz des y-Wertes:

$$y = 80$$

4. Schritt:

$$2x + 3y = 280$$

$$2x + 3 \cdot 80 = 280$$

$$2x = 280 - 240$$

$$2x = 40$$

$$x = \frac{40}{2} = 20$$

Das ist alles! Einfach, schnell, verständlich!

Zählen wir trotzdem die Zahl der arithmetischen Operationen (Multiplikationen und Additionen bzw. Subtraktionen), die für die Lösung nach dem Eliminationsverfahren bzw. nach dem Gaußschen Verfahren notwendig sind.

Das sind genau 12 Operationen, wie auf der nächsten Seite gezeigt wird.

1. Schritt:

$$\begin{cases} 7\cdot 2x + 7\cdot 3y = 7\cdot 280 & \big| \times 7 \\ 2\cdot 4x + 2\cdot 5y = 2\cdot 540 & \big| \times 2 \end{cases}$$

6 Operationen

2. Schritt:

$$(14x - 14x) + (21y - 10y) = (1960 - 1080)$$

2 Operationen

3. Schritt:

$$y = \frac{880}{11} = 80$$

1 Operation

4. Schritt:

$$2x + 3\cdot 80 = 280$$

$$2x = 280 - 240$$

$$x = \frac{40}{2} = 20$$

3 Operationen

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Kann man die algebraischen Gleichungssysteme mit weniger arithmetischen Operationen als beim Eliminationsverfahren lösen?

Nachfolgend ist die Lösung nach dem sogenannten *Passwort-Verfahren* beschrieben. Die Idee dieses Verfahren besteht darin, das jedes Gleichungssystem ein bestimmtes Passwort hat. Die Regeln zur Bestimmung des Passwortes wurden aus dem ASA (Antisystem-Approach) hergeleitet.

Betrachten wir wieder die gegebene Gleichung:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 280 \\ 7x + 5y = 540 \end{cases}$$

Diese Gleichung wird als *Originalsystem* bezeichnet.

Es wird nun nicht nach den Unbekannten x und y gesucht, sondern nach dem Passwort. Das Passwort eines Gleichungssystems besteht aus zwei noch unbekannten Werten P_1 und P_2, so dass sich die Lösung des Gleichungssystems wie folgt ergibt:

$$x = c_1 P_1 + c_2 P_2$$

Die Koeffizienten c_1 und c_2 sind die Absolutglieder 280 und 540.

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Das Passwort wird aus dem *Antisystem* bestimmt, das aus dem Originalsystem folgendermaßen durch Umschreiben des Gleichungssystem erstellt wird:

Originalsystem

$$\begin{cases} 2x+3y=280 \\ 7x+5y=540 \end{cases}$$

Antisystem

$$\begin{cases} 2P_1+7P_2=1 \\ 3P_1+5P_2=0 \end{cases}$$

Die Bildung des Antisystems ist der Kernpunkt des Verfahrens und soll ausführlicher erklären werden. Also, zuerst werden die Plätze von Koeffizienten 3 und 7 bei Unbekannten x und y vertauscht:

$$\begin{cases} 2x+7y=280 \\ 3x+5y=540 \end{cases}$$

Dann werden die Unbekannte x und y durch die Passworte P_1 und P_2 ersetzt:

$$\begin{cases} 2P_1+7P_2=280 \\ 3P_1+5P_2=540 \end{cases}$$

Zum Schluss werden die Absolutglieder c_1 = 280 und c_2 =540 durch neue Werte ersetzt, nämlich:

$$c_1=1$$

$$c_2=0$$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Damit ist das Antisystem erstellt!

War es kompliziert?

Nein! Nicht komplizierter, als Tanzen-Lernen!
http://www.heypunk.de/heypunk/inhalt/ueberlebenskampf/ueberlebenskampf-pogo.htm

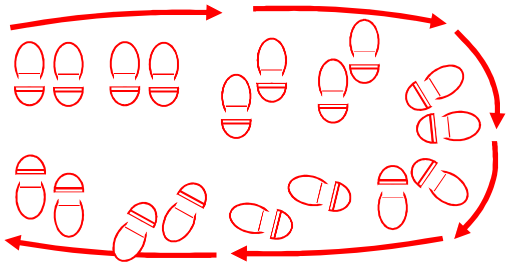
Also, widerholen wir nochmal wie beim Tanzen-Lernen:

Originalsystem

$$\begin{cases} 2x + 3y = 280 \\ 7x + 5y = 540 \end{cases}$$

Plätze tauschen!

$$\begin{cases} 2x + 7y = 280 \\ 3x + 5y = 540 \end{cases}$$



Unbekannte x, y durch Passworte P_1, $P2$ ersetzen!

$$\begin{cases} 2P_1 + 7P_2 = 280 \\ 3P_1 + 5P_2 = 540 \end{cases}$$

Absolutglieder tauschen!

Antisystem

$$\begin{cases} 2P_1 + 7P_2 = 1 \\ 3P_1 + 5P_2 = 0 \end{cases}$$

Und vergessen wir nicht, wofür wir „getanzt“ haben:

$$x = c_1 P_1 + c_2 P_2 \qquad \text{bzw.} \qquad x = 280 P_1 + 540 P_2$$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Nun fängt die Lösung des gegeben Gleichungssystems an:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 280 \\ 7x + 5y = 540 \end{cases}$$

1. Schritt: Das Passwort wird aus dem Antisystem berechnet:

$$\begin{cases} 2P_1 + 7P_2 = 1 \\ 3P_1 + 5P_2 = 0 \end{cases}$$

Dafür wird zuerst P_2 aus der zweiten Gleichung ermittelt:

$$3P_1 = -5P_2 \quad \Longrightarrow \quad P_2 = -\frac{3}{5}P_1$$

Dann wird P_2 in die erste Gleichung eingesetzt:

$$2P_1 + 7P_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2P_1 - 7 \cdot \frac{3}{5}P_1 = 1$$

Somit gilt $P_1 = \dfrac{1}{2 - 7 \cdot \frac{3}{5}} = -\dfrac{5}{11}$ und $P_2 = -\dfrac{3}{5}P_1 = -\dfrac{3}{5} \cdot \left(-\dfrac{5}{11}\right) = \dfrac{3}{11}$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

2. Schritt: Der Wert einer von zwei Unbekannten wird berechnet, nämlich:

$$x = 280P_1 + 540P_2 = -280 \cdot \frac{5}{11} + 540 \cdot \frac{3}{11} = 20$$

3. Schritt: Die zweite Unbekannten wird aus einer von zwei gegeben Gleichungen berechnet, z.B. aus der ersten Gleichung, mit dem Einsatz des x-Wertes:

$$x = 20$$

$$2x + 3y = 280$$

$$2 \cdot 20 + 3y = 280$$

$$3y = 280 - 40$$

$$3y = 240$$

$$y = \frac{240}{3} = 80$$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Wie groß ist die Zahl der arithmetischen Operationen (Multiplikationen und Additionen bzw. Subtraktionen), die für die Lösung nach dem Passwort-Verfahren notwendig sind?

Das sind genau 9 Operationen, wie unten gezeigt ist.

1. Schritt: $P_1 = \dfrac{1}{2 - 7 \cdot \dfrac{3}{5}} = -\dfrac{5}{11}$ $\quad P_2 = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{11} = \dfrac{3}{11}$ 4 Operationen

2. Schritt: $x = -280 \cdot \dfrac{5}{11} + 540 \cdot \dfrac{3}{11} = 20$ 4 Operationen

2. Schritt: $y = \dfrac{240}{3} = 80$ 1 Operation

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Insgesamt brauch man 9 Operation für die Lösung nach dem Passwort-Verfahren, d.h. um 3 Operationen weniger, als beim Eliminationsverfahren!

Nur drei Operationen? Der Vorteil scheint gering zu sein.

Aber nicht nur der Rechenaufwand wird beim Passwort-Verfahren gekürzt, auch die Genauigkeit wird höher, wie unten an einem Beispiel gezeigt ist.

$$\begin{cases} 3,3313x + 9,7353y = 82,2897 \\ 2,1143x - 6,7893y = -74,7613 \end{cases}$$

<u>Lösung nach Eliminationsverfahren</u>:

$$x = -3,9151$$
$$y = 9,7924$$

<u>Lösung nach Passwort-Verfahren</u>:

$$x = -2,815$$
$$y = 10,135$$

Lösungskontrolle:

$$\begin{cases} 82,2896 = 82,2897 \\ -74,7612 = -74,7613 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 82,2897 = 82,2897 \\ -74,7613 = -74,7613 \end{cases}$$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Und noch ein wichtiger Vorteil des Passwort-Verfahrens:

Wird das Passwort einmal für ein Gleichungssystem bestimmt, gilt dieses Passwort danach für alle Systeme mit gleichen Koeffizienten.
Sind beispielweise die Koeffizienten 2 und 3, sowie 4 und 5 wie unten gegeben, haben alle Gleichungssysteme mit diesen Koeffizienten nur ein Passwort!

$$\begin{cases} 2x+3y=28 \\ 4x+5y=48 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4x+5y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 4x+5y=0 \end{cases}$$

Passwort:

$$P_1=-\frac{5}{2} \qquad P_2=\frac{3}{2}$$

Lösung:

$$x=28P_1+48P_2 \qquad x=2P_1+10P_2 \qquad x=-2P_1+0\cdot P_2$$

$$x=2 \qquad x=10 \qquad x=5$$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Gegenüberstellung: Passwort-Verfahren und Eliminationsverfahren

- Nach dem Eliminationsverfahren wird das *Originalsystem* mit Absolutgliedern gelöst, die vorgegeben sind, z.B. 280 und 540. Dagegen wird nach dem Passwort-Verfahren das *Antisystem* gebildet und gelöst, dessen Absolutglieder man selbst wählt, und zwar so, damit die Lösung einfach, schnell und genau erfolgt. Das sind die Absolutglieder $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$. Dadurch braucht man für die Lösung nach dem Passwort-Verfahren 3 arithmetischen Operationen weniger als beim Eliminationsverfahren.

- Die Genauigkeit ist nach dem Passwort-Verfahren höher, weil man günstigere Absolutglieder für die Lösung des *Antisystems* selbst wählen kann.

- Das einmal ermittelte Passwort gilt dann für alle Systeme mit gleichen Koeffizienten und beliebigen Absolutgliedern.

- Das Passwort-Verfahren wie auch das Eliminationsverfahren gilt nicht nur für Gleichungssysteme mit zwei, sondern mit mehreren Unbekannten. Aber: je größer ist die Anzahl der Unbekannten, desto wenigen ist der Rechenaufwand des neues Verfahrens gegenüber dem etablierten Eliminationsverfahren.

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Diskussion

Frage: Ist das Passwort-Verfahren nur für Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten geeignet?

Antwort: Nein, im Buch „Mobile Mathematik“ sind die manuellen Lösungen für drei, vier und fünf Unbekannten beschrieben. Bei der Lösung mit einem PC ist die Zahl von Unbekannten natürlich viel höher.

Frage: Welche praktische Bedeutung hat das Passwort-Verfahren? Die Kürzung um 3 arithmetischen Operationen ist doch nicht bedeutend im PC-Alter!

Antwort: Das Passwort-Verfahren stammt aus dem Antisystem-Approach, das seine Bedeutung für verschiedene Engineering-Probleme bereits nachgewiesen hat. Die Lösung von Gleichungssystemen erfolgt heute ausschließlich mit PC nach numerischen Verfahren. In diesem Sinne hat das Passwort-Verfahren kaum Vorteile. Aber damit ist der Weg zur Lösung nicht nur einer Gleichung, sondern einer Menge von Gleichungen eröffnet, wie auf der Seite 17 gezeigt ist.

Frage: Warum hat das Passwort-Verfahrens höhere Genauigkeit?

Antwort: Weil wir das Antisystem mit besseren Absolutgliedern $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$ erstellt haben, während das Eliminationsverfahren mit gegebenen Absolutgliedern wie z.B. 82,2897 und 74,7613 (Seite 18), berechnet.

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Frage: Auf der Seite 13 haben Sie die Absolutglieder c_1 = 1 und c_2 = 0 gewählt. Was passiert, wenn es umgekehrt gewählt wird: c_1 = 0 und c_2 = 1?

Antwort: In diesem Fall wird das Antisystem entsprechend gebildet und das Passwort wird nicht für x, sondern für y berechnet, wie unten erklärt ist:

$$\begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2P_1 + 7P_2 = 1 \\ 3P_1 + 5P_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2P_1^* + 7P_2^* = 0 \\ 3P_1^* + 5P_2^* = 1 \end{cases}$$

$$x = 280P_1 + 540P_2 \qquad y = 280P_1^* + 540P_2^*$$

Frage: Warum soll man für c_1 und c_2 immer 0 oder 1 wählen?

Antwort: Das Problem der Lösung besteht darin, dass jede Gleichung des Originalsystems je zwei Unbekannten hat. Um dies zu vermeiden, werden die Koeffizienten einer Unbekannten beim Eliminationsverfahren gleichgesetzt und eliminiert (siehe unten). Nach ASA bzw. nach dem Passwort-Verfahren wird das Originalsystem durch das Antisystem ersetzt und zwar so, dass das Eliminieren einer Unbekannten einfach erfolgt.

Originalsystem	Eliminieren nach Gauß	Antisystem lösen
$\begin{cases} 2x + 3y = 280 \\ 7x + 5y = 540 \end{cases}$	$\begin{cases} 14x + 21y = 1960 \\ 14x + 10y = 1080 \end{cases}$	$\begin{cases} 2P_1 + 7P_2 = 1 \\ 3P_1 + 5P_2 = 0 \end{cases}$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Frage: Kann man ASA-Verfahren mit höherer Mathematik beschreiben?

Antwort: Ja, mit Vektoren und Matrizen, was für breites Publikum nicht geeignet wäre.

Originalsystem	Vektoren und Systemmatrix	Originalsystem
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$	$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\mathrm{A}\vec{X} = \vec{C}$
Antisystem:	Vektoren und Systemmatrix	Antisystem
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$	$\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ $\vec{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\vec{P} = \vec{D}$
„Zahlen-Energie“-Bilanz:	$E_{\text{links}} = \vec{X} \cdot \vec{D} = \vec{X} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{P}$ $E_{\text{rechts}} = \vec{P} \cdot \vec{C} = \vec{P} \cdot \mathrm{A} \cdot \vec{X}$	Bilanz: $E_{\text{links}} = E_{\text{rechts}}$

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Frage: Welcher Unterschied gibt es zwischen dem *Passwort*-Verfahren und *Klecksen*-Verfahren, das auch in Ihrem Buch „Verbotene Mathematik“ beschrieben ist?

Antwort: Beide Verfahren basieren auf dem ASA-Verfahren, nur die Form der Behandlung ist unterschiedlich, um die höhere Mathematik für breites Publikum umzugehen. Hierzu gehört noch das *Mobil*-Verfahren, das im Buch „Mobile Mathematik“ beschrieben wurde. Beim *Mobil*-Verfahren ist das Originalsystem wie ein stationäres Gerät, z.B. Fernseher, bezeichnet. Das Antisystem stell dann eine Fernbedienung für dieses stationären Gerät dar. Beim Mobil-Verfahren wird nicht nach Passworten P_1 und P_2 gesucht, sondern es werden die Tasten der Fernbedienung betätigt.
Aber die Mechanismen der Lösung sind bei den Passwort-, Klecksen- und Mobil-Verfahren dieselben, nämlich:

Originalsystem ⇨ Antisystem ⇨ „Zahlen-Energie“ Bilanz

Frage: Warum Ihre Lösung ist verboten? So heißt doch Ihr Buch!

Antwort: Ja, das ist für Jugendlichen unter 18 Jahren verboten, damit sie zuerst die klassische Grundmathematik in der Schule gut erlernen, bevor sie „die Klecksen“ auf Gleichungen setzten. Allerdings trotz meinen Bemühungen, die Methoden populär darzustellen, sind die im Buch beschriebenen Verfahren für Schüler sowieso schwer verständlich.

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Frage: *Passwort*, *Klecksen*, *Schatten* von Zahlen, *Kopierer- Zahlen* – all diese Begriffe stammen nicht aus der Mathematik und sind für die Mathematik gar nicht geeignet. Wie und warum kamen Sie auf die Idee, solche Begriffe zu nutzen?

Antwort: Hierzu noch Begriffe *Zahlenturm* und *Zahlen-Repeater* im Buch „Existentielle Mathematik“, wie auch bereits erwähnten Begrife *stationäres Gerät* und *Fernbedienung* des Buches „Mobile Mathematik“.

Die Mathematik ist Abstraktion aus *dem sinnlich Wahrnehmbaren*, d.h. aus physikalischen Objekten wie Strecken, Stäbe usw. Daraus entstanden mathematische Größen wie Länge, Fläche, Volumina. Das *sinnlich Wahrnehmbare* ändert sich im Laufe der Zeit. Im 17. Jahrhundert begann man die physikalischen Größen wie Temperaturm, Druck, mit stetigen Kurven und Funktionen, Differentialen, Integralen zu beschreiben. Im 19. Jahrhundert wurden aus Differentialen die Differenzen, aus Integralen die rekursiven Summen gebildet und mit numerischen Algorithmen mittels Rechentechnik ermittelt. Die Lösungsmethoden und die Begriffe sind aber in ihrer ursprünglichen Form des 17. Jahrhunderts geblieben: wir suchen weiter nach *Wurzeln*, bilden *Determinanten*, wie alte Römer. Heute sind wir mit Begriffen *Speicher*, *Download*, *Passwort, Mobilität* vertraut. Ist das nicht das *sinnlich Wahrnehmbare* unseres Jahrhundert? Das ist die Antwort auf Ihre Frage.

S. Zacher: Verbotene Mathematik. 2012, ISBN 978-3-937638-22-5, Verlag Dr. Zacher, 117 Seiten, Preis 19,90 EURO

Frage: Meinen Sie also, dass die klassischen Definitionen wie „Die Lösung von Gleichungen“ durch „Die Suche nach Passworten“ oder „Wurzelziehen“ durch „Zoomen“ ersetzt werden sollen?

Antwort: Nein, ich bin für keine revolutionierenden Änderungen. Aber es ist sinnvoll, ausgegangen aus dem heutigen *sinnlich Wahrnehmbaren,* auch neue Methoden mit neuen Begriffen zu entwickeln. Merken wir auch, dass alle meine Bücher zur Serie „Science-non-fiction“ gehören: „In unserer *Science-non-fiction* Serie werden neue, zum Teil noch nicht veröffentlichte, wissenschaftliche Ereignisse dargestellt. Es geht also um reine *Science*, wenn es mathematische und technische Methoden betrifft. Dagegen werden die strikten Methoden an ungewöhnlichen *fiction*-Beispielen behandelt. Die reelle Welt soll somit in einer phantastischen Form erscheinen.“ (Zitat S. Zacher „Existentielle Mathematik“, ISBN 978-3-937638-16-4, 2008, Seite V).

Frage: Nun zurück zur Lösung von algebraischen Gleichungssystemen. Trotz allen Vorteilen, scheint mir das Eliminationsverfahren viel einfacher und verständlicher zu sein, als das neue Passwort-Verfahren. Gibt es vielleicht hierzu noch andere Literaturquellen?

Antwort: Nein, es gibt keine weiteren Bücher. Aber Ihre Anmerkung ist verständlich: **Das Neue ist kompliziert, solange es neu ist.**
